

ANÁLISE MATEMÁTICA IV  
FICHA 2 – ANÁLISE COMPLEXA

(1) Para cada um dos seguintes conjuntos  $Z \subset \mathbb{C}$ , esboce o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : e^w \in Z\}$$

dos seus logaritmos.

- (a)  $Z = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ ;  
 (b)  $Z = \mathbb{R}$ ;  
 (c)  $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e, \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}\}$ .

**Resolução:** Como, para  $z \neq 0$ , os logaritmos de  $z$  são dados por

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

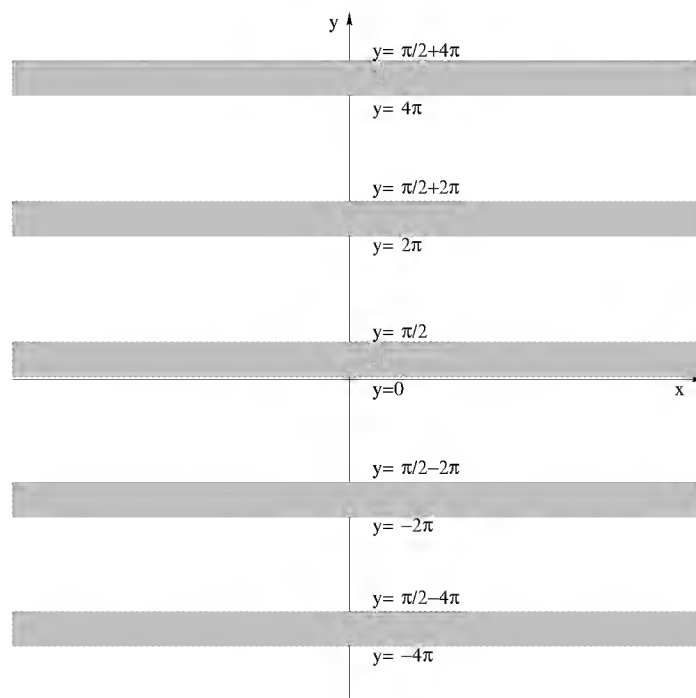
os conjuntos  $W$  são da forma

$$W = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \text{ e } z \in Z \setminus \{0\}\}.$$

(a)

$$\begin{aligned} W &= \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\} \\ &= \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}, |z| > 0, \arg z \in ]0, \pi/2[ \} \\ &= \{x + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_y : k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, \theta \in ]0, \pi/2[ \}. \end{aligned}$$

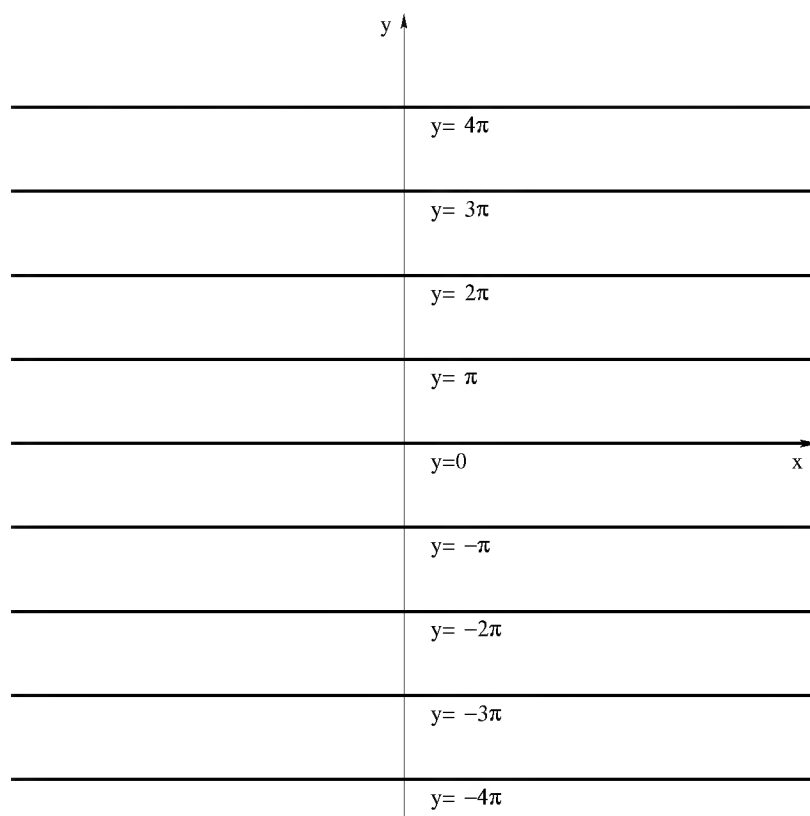
Portanto o esboço do conjunto  $W$  é:



(b) Tendo em conta que 0 não pertence à imagem da exponencial, temos

$$\begin{aligned}
 W &= \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \} \\
 &= \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}, |z| > 0, \arg z = 0 \text{ ou } \arg z = \pi \} \\
 &= \{ x + i \underbrace{(2k\pi)}_y : k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \}.
 \end{aligned}$$

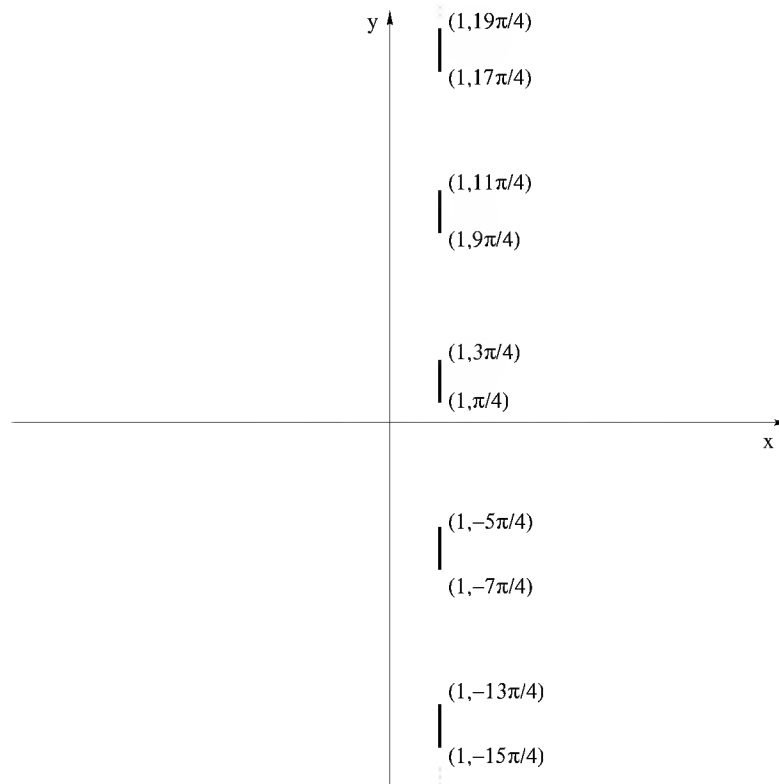
Portanto o esboço do conjunto  $W$  é:



(c)

$$\begin{aligned}
 W &= \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}, |z| = e, \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \} \\
 &= \{ \underbrace{1}_x + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_y : k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \}.
 \end{aligned}$$

Portanto o esboço do conjunto  $W$  é:



□

(2) Calcule pela definição

$$\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz ,$$

onde  $\gamma$  é a semicircunferência ou circunferência parametrizada por:

- (a)  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;
- (b)  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ;
- (c)  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Resolução:**

- (a) A parametrização  $z(\theta) = 2e^{i\theta}$  tem derivada  $z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$ . Portanto, pela definição de integral temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz &= \int_{\gamma} \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz \\ &= \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (2ie^{i\theta} + 2i) d\theta \\ &= 2e^{i\theta} \Big|_0^{\pi} + 2\pi i \\ &= -2 - 2 + 2\pi i \\ &= -4 + 2\pi i \end{aligned}$$

(b) *Analogamente*

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz &= \int_{\gamma} \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} \left(1 + \frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta} d\theta \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} (2ie^{i\theta} + 2i) d\theta \\
 &= 2e^{i\theta} \Big|_{\pi}^{2\pi} + 2\pi i \\
 &= 2 - (-2) + 2\pi i \\
 &= 4 + 2\pi i
 \end{aligned}$$

(c) *Pela aditividade do integral em relação ao caminho de integração, o integral da alínea c) é igual à soma dos integrais das alíneas a) e b):*

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz &= (-4 + 2\pi i) + (4 + 2\pi i) \\
 &= 4\pi i
 \end{aligned}$$

□

(3) Seja  $\gamma$  a circunferência de raio 1 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. Usando o teorema de Cauchy e as fórmulas integrais de Cauchy, calcule os seguintes integrais:

(a)

$$\int_{\gamma} 1 \, dz ;$$

(b)

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} \, dz ;$$

(c)

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-2i)^7} \, dz ;$$

(d)

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(2z-i)^6} \, dz .$$

**Resolução:**

(a) A função constante  $f(z) = 1$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , que é uma região simplesmente conexa. Portanto pelo teorema de Cauchy, o integral de  $f(z)$  ao longo de qualquer caminho fechado em  $\mathbb{C}$  é 0. Em particular

$$\int_{\gamma} 1 \, dz = 0$$

- (b)  $f(z) = e^z$  é uma função analítica em  $\mathbb{C}$  e  $\gamma$  é um caminho fechado simples contendo a origem e orientado no sentido positivo. Portanto pela fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz \\ &= 2\pi i f(0) \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

- (c) A função

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-2i)^7}$$

é uma função analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ . Como  $2i$  não pertence ao interior do contorno  $\gamma$ , a função é analítica numa região que contém o interior do contorno  $\gamma$  e portanto, pelo teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-2i)^7} dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

- (d) Podemos escrever o integral na forma

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(2z-i)^6} dz = \frac{1}{2^6} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-\frac{i}{2})^6} dz$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 5 de uma função analítica à função  $f(z) = \sin z$  (que é analítica em  $\mathbb{C}$  e portanto numa região que contém o interior do caminho  $\gamma$ ) temos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(2z-i)^6} dz &= \frac{1}{2^6} \frac{2\pi i}{5!} f^{(5)}\left(\frac{i}{2}\right) \\ &= \frac{\pi i}{2^5 120} \cos\left(\frac{i}{2}\right) \\ &= \frac{\pi i}{2^8 15} \frac{e^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{(1+e)\pi i}{2^9 15 \sqrt{e}}\end{aligned}$$

□

- (4) Determine a série de Taylor em torno da origem de cada uma das seguintes funções, indicando o raio de convergência.

(a)  $f(z) = \frac{1}{1-z};$

(b)  $f(z) = e^{z+2};$

(c)  $f(z) = \begin{cases} \cos z & \text{se } \operatorname{Re} z < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

**Resolução:**

- (a) Para  $|z| < 1$ , a função  $f$  é a soma da série geométrica de razão  $z$ . Por unicidade do desenvolvimento em série de potências, concluímos que o desenvolvimento de Taylor é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

válido para  $|z| < 1$ . O raio de convergência da série de Taylor é 1.

(b) Temos

$$e^{z+2} = e^2 e^z = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sendo a última igualdade válida para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Por unicidade concluímos que o desenvolvimento de Taylor em torno da origem é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} z^n$$

sendo o raio de convergência  $+\infty$ .

(c) O desenvolvimento de Taylor de uma função num ponto depende apenas dos valores que a função toma numa vizinhança desse ponto. Portanto o desenvolvimento de Taylor de  $f(z)$  na origem é o mesmo que o de  $\cos z$ . Ora

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao cancelamento das potências ímpares de  $z$ . Este desenvolvimento é válido para qualquer  $z \in \mathbb{C}$  porque o desenvolvimento da exponencial é válido para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Assim, o desenvolvimento de Taylor de  $f(z)$  em torno da origem é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

e o raio de convergência desta série de potências é  $+\infty$ .

□

**Comentário:** Apesar de o desenvolvimento de Taylor da alínea c) convergir para todo o  $z \in \mathbb{C}$ , ele só representa a função  $f$  no disco aberto de raio 1 centrado na origem, que é o maior disco aberto centrado na origem em que  $f(z)$  é analítica. ◇

(5) Determine as séries de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

válidas nas seguintes regiões:

- (a)  $0 < |z| < 1$ ;
- (b)  $|z| > 1$ ;
- (c)  $0 < |z - 1| < 1$ ;
- (d)  $|z - 1| > 1$ .

**Resolução:**

(a) Temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ para } 0 < |z| < 1 \\
 &= \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \text{ para } 0 < |z| < 1
 \end{aligned}$$

Por unicidade do desenvolvimento de Laurent, concluímos que o desenvolvimento de Laurent na região  $0 < |z| < 1$  é

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

(b) Temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \\
 &= \frac{1}{z} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - 1} \\
 &= -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\
 &= -\frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \text{ para } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{1}{z^k} \text{ para } |z| > 1
 \end{aligned}$$

Por unicidade, concluímos que o desenvolvimento de Laurent na região  $|z| > 1$  é

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} -z^n$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z} \\
 &= -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\
 &= -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ para } 0 < |z-1| < 1 \\
 &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ para } 0 < |z-1| < 1
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\
&= -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}} \\
&= -\frac{1}{(z-1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-1}\right)^k \quad \text{para } \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(z-1)^k} \quad \text{para } |z-1| > 1
\end{aligned}$$

Portanto o desenvolvimento de Laurent para  $|z-1| > 1$  é

$$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n-1} (z-1)^n$$

□

(6) Seja  $f$  a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{2+z} + \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z}.$$

- Determine e classifique as singularidades de  $f$ .
- Determine o desenvolvimento de  $f$  em série de Laurent válido para  $0 < |z| < 2$ .
- Calcule o integral de  $f$  ao longo da circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.
- Determine o raio de convergência do desenvolvimento de  $f$  em série de potências de  $z+3$ , sem calcular os coeficientes desse desenvolvimento. Justifique!

**Resolução:**

- (a) A função  $f(z)$  tem singularidades nos pontos  $z=0$  e  $z=-2$ . No ponto 0 temos

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2+z} + \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z} \right) &= \frac{1}{2} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z}{z^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{2z} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z}{2} \\
&= \frac{1}{2} + 0
\end{aligned}$$

onde na segunda e terceira igualdades se aplicou a regra de l'Hospital<sup>1</sup> para resolver a indeterminação do limite. Uma vez que  $f(z)$  tem limite quando  $z \rightarrow 0$  conclui-se que o ponto  $z=0$  é uma singularidade removível.

Quanto ao ponto  $z=-2$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow -2} f(z) = \infty$$

<sup>1</sup>Também conhecida por regra de Cauchy



logo o ponto não é uma singularidade removível.

$$\lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \left( \frac{1}{z+2} + \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z} \right) = 1 + 0 - 0 = 1$$

logo o ponto  $z = -2$  é um pólo simples.

(b) Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+z} + \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -2\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} \text{ para } 0 < \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} \text{ para } 0 < |z| < 2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ para } 0 < |z| < 2 \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(c) Seja  $\gamma$  a circunferência de raio 1 percorrida uma vez no sentido positivo. A única singularidade de  $f(z)$  no interior de  $\gamma$  é o ponto  $z = 0$ . Uma vez que esta é uma singularidade removível podemos prolongar  $f(z)$  por continuidade ao ponto 0 obtendo uma função analítica no interior do contorno  $\gamma$ . Então pelo teorema de Cauchy, concluímos que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

(d) Seja  $R$  o raio de convergência do desenvolvimento em série de Taylor de  $f(z)$  no ponto  $z = -3$ . Pelo teorema sobre o desenvolvimento de funções analíticas em série de Taylor sabemos que  $R$  é maior ou igual ao raio do maior disco centrado em  $z = -3$  no qual  $f$  é analítica. Isto é,  $R$  é maior ou igual à distância de  $z = -3$  à singularidade mais próxima, que é  $z = -2$ . Daqui concluímos que  $R \geq 1$ .

Por outro lado, a série de Taylor converge para uma função analítica no interior do seu disco de convergência, que coincide com  $f(z)$  para  $|z| < 1$ . Ora vimos na alínea a) que  $f(z) \rightarrow \infty$  quando  $z \rightarrow -2$ . Portanto  $z = -2$  não pode pertencer ao disco de convergência da série. Concluímos que  $R \leq 1$ .

Conclusão: o raio de convergência do desenvolvimento de  $f(z)$  em série de potências de  $(z+3)$  é  $R = 1$ .

□

**Comentário:** Para classificar a singularidade  $z = 0$  na alínea a) poder-se-ia ter utilizado o desenvolvimento de Laurent da função  $\frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z}$  no ponto  $z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{z^2} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) - \frac{1}{z} \\ &= -\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \end{aligned}$$

*Uma vez que o desenvolvimento de Laurent no ponto  $z = 0$  não tem termos com potências negativas concluímos novamente que a singularidade é removível.*  $\diamond$